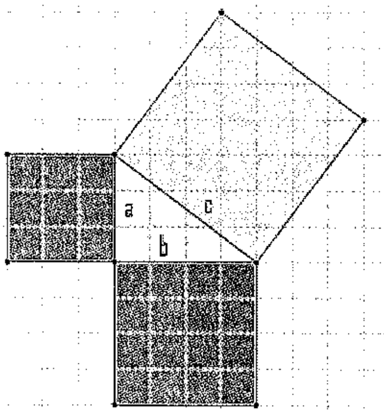
Teorema di Pitagora

Il triangolo rettangolo è un triangolo molto particolare e studiato, se ne conoscono diverse proprietà e vi si applicano diversi teoremi.

Il teorema di Pitagora stabilisce la relazione fondamentale tra i lati di un triangolo rettangolo ed è una versione limitata a essi del teorema di Carnot.

Enunciato

In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è pari alla somma dell'area dei quadrati costruiti sui cateti.



Dato un triangolo rettangolo di lati a, b *e* c, *e indicando con* c *la sua ipotenusa e con* a *e* b *i suoi cateti, il teorema è espresso dall'equazione:*

$a^2 + b^2 = c^2$

Da cui risolvendo per l'ipotenusa c si ha:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Da cui si ricavano i rispettivi cateti a e b:

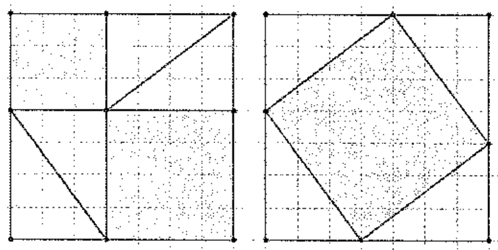
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $\qquad$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

DIMOSTRAZIONE

Sia dato un triangolo rettangolo qualsiasi, non necessariamente una terna pitagorica di numeri interi. Indichiamo con c la sua ipotenusa e con a e b i suoi cateti.

Si costruiscano due distinti quadrati che abbiano per lato la somma dei cateti ($l = a + b$). Si costruiscano all'interno di ogni quadrato quattro triangoli congruenti ai precedenti in modo da ottenere il quadrato costruito sull'ipotenusa in un caso e i quadrati costruiti sui cateti nell'altro. I triangoli hanno per costruzione i cateti congruenti e l'angolo compreso congruente e retto e sono per il primo criterio di congruenza (LAL) congruenti.

Per differenza di parti congruenti si ha che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.



Dimostrazione

Esistono diverse altre dimostrazioni del teorema di Pitagora. La presente è didatticamente efficace e si presta ad un lavoro pratico di taglia incolla o pesatura.

Inversamente, ogni triangolo in cui i tre lati verificano questa proprietà è rettangolo.

Triangoli rettangoli con angoli acuti particolari

La soluzione di triangoli rettangoli particolari è possibile conoscendo solo uno dei suoi lati.

Triangoli rettangoli con angoli acuti di 45°

Un triangolo rettangolo con due angoli acuti di 45° ha i cateti congruenti ed è, quindi, isoscele.

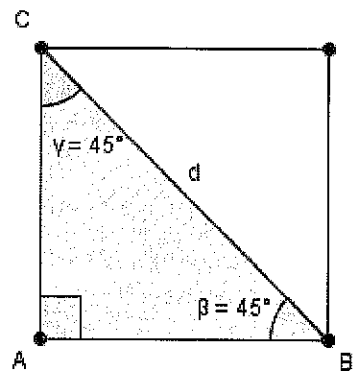
L'ipotenusa è in questo caso la diagonale di un quadrato avente per lato no dei cateti del triangolo rettangolo.

Applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{l^2} = l\sqrt{2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

$$l = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

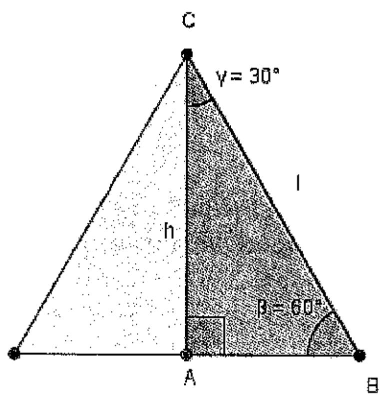


Triangoli rettangoli con angoli acuti di 30° e 60°

Un triangolo rettangolo con un angolo acuto di 30° e l'altro di 60° (180°-90°-30°) è la metà di un triangolo equilatero che ha per lato l'ipotenusa del triangolo rettangolo.

L'ipotenusa è in questo caso il doppio del cateto opposto all'angolo di 30° del triangolo rettangolo.

Applicando il teorema di Pitagora si ha:



$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}l^2 - \frac{1}{4}l^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\sqrt{l^2}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

Raccolta di problemi di geometra piana di BASE sul teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo, completi di risoluzione guidata.
Triangle Rectangle Problems involving Pythagoras Theorem. (Geometry)

---

1. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo che ha i cateti lunghi rispettivamente 18 m e 24 m.

soluzione

2. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente 5 e 12 cm.

soluzione

3. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo che ha il cateto minore e l'ipotenusa lunghi rispettivamente 27 dm e 45 dm.

soluzione

4. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo che ha un cateto e l'ipotenusa lunghi rispettivamente 7 dm e 25 dm.

soluzione

5. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo che ha i cateti lunghi rispettivamente 6 dm e 3,2 dm.

soluzione

6. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo in cui un cateto misura 48 cm e l'ipotenusa 52 cm.

soluzione

7. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 50 cm e un cateto 30 cm. Calcola l'area e l'altezza relativa all'ipotenusa.

soluzione

8. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo in cui un cateto misura 3,9 cm e l'ipotenusa 6,5 cm.

soluzione

9. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente 10 e 24 cm.

soluzione

10. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo in cui un cateto misura 33 cm e l'ipotenusa 55 cm.

soluzione

11. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo in cui un cateto misura 1,2 cm e l'ipotenusa 3,7 cm.

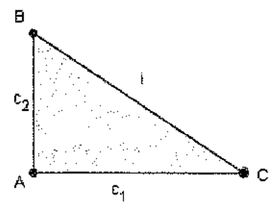
soluzione

12. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo che ha un cateto e l'ipotenusa lunghe rispettivamente 16 m e 65 m.

soluzione

Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo che ha il cateto minore e l'ipotenusa lunghi rispettivamente 27 dm e 45 dm.

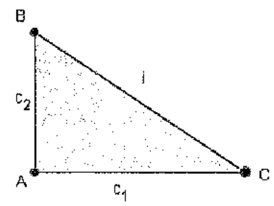
Dati e relazioni
i = 45 dm
$c_2 = 27$ dm
Richieste
perimetro
area



$$c_1 = \sqrt{i^2 - c_2^2} = \sqrt{45^2 - 27^2} = \sqrt{2025 - 729} = \sqrt{1296}$$
$$= 36\, dm$$
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{36 \cdot 27}{2} = 18 \cdot 27 = 486\, dm^2$$
$$2p = c_1 + c_2 + i = 36 + 27 + 45 = 108\, dm$$

Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo che ha un cateto e l'ipotenusa lunghi rispettivamente 7 dm e 25 dm.

Dati e relazioni
i = 25 dm
$c_2 = 7$ dm
Richieste
perimetro
area



$$c_1 = \sqrt{i^2 - c_2^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24\, dm$$
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{24 \cdot 7}{2} = 12 \cdot 7 = 84\, dm^2$$
$$2p = c_1 + c_2 + i = 24 + 7 + 25 = 106\, dm$$

In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 50 cm e un cateto 30 cm. Calcola l'area e l'altezza relativa all'ipotenusa.

Dati e relazioni
$i = 50$ cm
$c_1 = 30$ cm
Richieste
area
altezza relativa all'ipotenusa

$$c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{2500 - 900} = \sqrt{1600} = 40\ cm$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 30 \cdot 20 = 600\ cm^2$$

$$h_1 = \frac{2 \cdot A}{i} = \frac{2 \cdot 600}{50} = \frac{2 \cdot 60}{5} = 2 \cdot 12 = 24\ cm$$

Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo in cui un cateto misura 3,9 cm e l'ipotenusa 6,5 cm.

Dati e relazioni
$i = 6{,}5$ cm
$c_1 = 3{,}9$ cm
Richieste
perimetro
area

$$c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2} = \sqrt{6{,}5^2 - 3{,}9^2} = \sqrt{42{,}25 - 15{,}21} = \sqrt{27{,}04} = 5{,}2\ cm$$

$$2p = c_1 + c_2 + i = 3{,}9 + 5{,}2 + 6{,}5 = 15{,}6\ cm$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{5{,}2 \cdot 3{,}9}{2} = 2{,}6 \cdot 3{,}9 = 10{,}14\ cm^2$$

Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo in cui un cateto misura 1,2 cm e l'ipotenusa 3,7 cm.

Dati e relazioni
i = 3,7 cm
$c_1 = 1{,}2$ cm
Richieste
1. 2p;
2. Area

$$c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2} = \sqrt{3{,}7^2 - 1{,}2^2} = \sqrt{13{,}69 - 1{,}44} = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5\ cm$$

$$2p = c_1 + c_2 + i = 1{,}2 + 3{,}5 + 3{,}7 = 8{,}4\ cm$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{1{,}2 \cdot 3{,}5}{2} = 0{,}6 \cdot 3{,}5 = 2{,}1\ cm^2$$

Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo che ha un cateto e l'ipotenusa lunghi rispettivamente 16 m e 65 m.

Dati e relazioni
i = 65 m
$c_1 = 16$ m
Richieste
1. 2p;
2. Area

$$c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2} = \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{4225 - 256} = \sqrt{3969} = 63\ m$$

$$2p = c_1 + c_2 + i = 16 + 63 + 65 = 144\ m$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{16 \cdot 63}{2} = 8 \cdot 63 = 504\ m^2$$