Identità ed equazioni

Consideriamo la frase:
"un numero più se stesso è uguale al suo doppio"
e traduciamola in termini matematici indicando "**un numero**" con la lettera x:

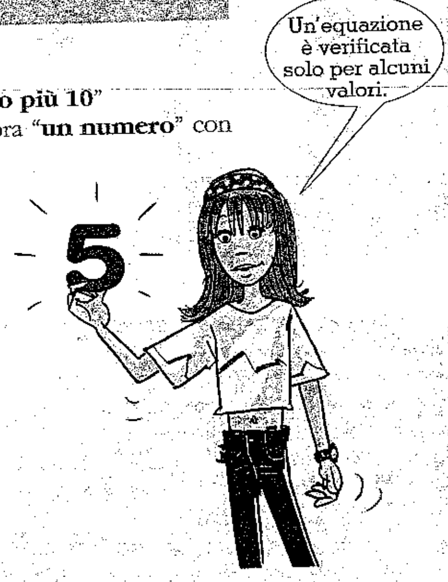
$$x + x = 2x$$

Proviamo adesso a verificarne la validità, sostituendo alla lettera x dei numeri a piacere:

- per $x = 4$, $\quad 4 + 4 = 2 \times 4$, $\quad 8 = 8$
- per $x = 10$, $\quad 10 + 10 = 2 \times 10$, $\quad 20 = 20$
- per $x = \frac{2}{3}$, $\quad \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2 \times \frac{2}{3}$, $\quad \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

Continuando con altri valori di x, constateremo che l'uguaglianza $x + x = 2x$ è sempre vera.
Un'uguaglianza di questo tipo si chiama **identità**.

> Un'uguaglianza fra due espressioni, di cui almeno una letterale, verificata per qualsiasi valore attribuito alla lettera o alle lettere che vi figurano si chiama **identità**.



Consideriamo adesso la frase:
"il triplo di un numero è uguale al numero stesso più 10"
e traduciamola in termini matematici indicando ancora "**un numero**" con la lettera x:

$$3x = x + 10$$

Proviamo adesso a verificarne la validità, sostituendo alla lettera x dei numeri a piacere:

- per $x = 6$, $\quad 3 \times 6 = 6 + 10$, $\quad 18 \neq 16$
- per $x = 5$, $\quad 3 \times 5 = 5 + 10$, $\quad 15 = 15$
- per $x = 9$, $\quad 3 \times 9 = 9 + 10$, $\quad 27 \neq 19$

Continuando con altri valori di x, constateremo che l'uguaglianza $\mathbf{3x = x + 10}$ non è più vera; l'unico valore che ci dà un'uguaglianza vera è 5.
Un'uguaglianza di questo tipo si chiama **equazione**.

> Un'uguaglianza fra due espressioni, di cui almeno una letterale, verificata solo per particolari valori attribuiti alla lettera o alle lettere che vi figurano si chiama **equazione**.

Consideriamo la frase:
"il triplo di un numero più 2 è uguale al numero stesso più 6"
traduciamola in termini matematici e constatiamo se è un'identità o un'equazione:

$$3x + 2 = x + 6$$

- per $x = 3$, $\quad 3 \times 3 + 2 = 3 + 6$, $\quad 9 + 2 = 9$, $\quad 11 \neq 9$
- per $x = -5$, $\quad 3 \times (-5) + 2 = -5 + 6$, $\quad -15 + 2 = 1$, $\quad -13 \neq 1$
- per $x = 2$, $\quad 3 \times 2 + 2 = 2 + 6$, $\quad 6 + 2 = 8$, $\quad 8 = 8$

L'uguaglianza $\mathbf{3x + 2 = x + 6}$ è vera solo per $x = 2$, quindi **è un'equazione**; impariamone l'esatta terminologia.

- Le due espressioni letterali che formano l'uguaglianza si dicono rispettivamente **1° membro** e **2° membro** dell'equazione:

$$\underbrace{3x + 2}_{\text{1° membro}} = \underbrace{x + 6}_{\text{2° membro}}$$

- Le lettere (o la lettera) che compaiono nell'espressione sono le (o la) **incognite** dell'equazione:

$$3x + 2 = x + 6$$

incognita

- Tutti i termini che non contengono le incognite si dicono **termini noti**:

$$3x + 2 = x + 6$$

termini noti

In base al numero di lettere diverse che vi compaiono, un'equazione si dice **a una**, **a due**, **a tre... incognite**:

$+ 4x + 5 = 2x - 7 \;\rightarrow$ equazione a una incognita
$- 7x + 9y = 27 \;\rightarrow$ equazione a due incognite

Il grado più elevato dei vari monomi che costituiscono l'equazione si chiama **grado** dell'equazione; un'equazione può quindi essere di **1°, 2°, 3°... grado**:

$+ 4x + 5 = 2x - 7 \;\rightarrow$ equazione di 1° grado
$3x^2 + 7 = 4x - 9 \;\rightarrow$ equazione di 2° grado

I particolari valori delle incognite che rendono vera l'equazione si dicono **soluzioni** o **radici** dell'equazione. Le soluzioni di un'equazione sono numeri appartenenti ai vari insiemi numerici studiati; l'insieme a cui appartengono le soluzioni si chiama *insieme verità* (o *ambiente*) dell'equazione.

Risolvere un'equazione significa calcolare tutte le sue soluzioni o radici.

Un'equazione si dice *intera* se l'incognita non figura al denominatore, si dice *frazionaria* o *fratta* in caso contrario:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-5=7x+8 \\ \dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x-3}{2}=-\dfrac{7}{8} \end{array}\right\} \textbf{equazioni intere}$$

$$\frac{5}{x-3}+\frac{x}{2}=7 \qquad \textbf{equazione frazionaria}$$

Continuiamo il nostro studio trattando, anche se non lo specificheremo più, equazioni intere di primo grado a una incognita.

I principi di equivalenza

Consideriamo due equazioni:

$$6x+4=28 \quad \text{e} \quad 10x=6x+16$$

Constatiamo che entrambe ammettono come unica soluzione $\boldsymbol{x}=\mathbf{4}$; infatti:

$$\begin{array}{lll} 6\cdot4+4=28 & \qquad & 10\cdot4=6\cdot4+16 \\ 24+4=28 & & 40=24+16 \\ 28=28 & & 40=40 \end{array}$$

Esse si dicono allora *equazioni equivalenti*; diciamo che:

Due equazioni si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Consideriamo due equazioni equivalenti:

$$7x=14 \quad \text{e} \quad 21x-3=39$$

È ovvio che, essendo equivalenti, basta risolverne una per avere anche la soluzione dell'altra. È evidente anche che è più semplice risolvere la prima, $7x=14$, che è immediata, piuttosto che la seconda.

Per risolvere qualsiasi equazione è opportuno quindi trasformarla in una equivalente ma di forma più semplice. Osserviamo come fare esaminando i due **principi di equivalenza** delle equazioni.

Primo principio di equivalenza

- Consideriamo l'equazione $2x+2=12$, la cui soluzione, come potete verificare, è $x=5$ e addizioniamo a entrambi i membri un numero qualsiasi, per esempio il numero **3**; otteniamo:

  $$2x+2+\mathbf{3}=12+\mathbf{3} \quad \text{ovvero} \quad 2x+5=15$$

  la cui soluzione è ancora $x=5$.
  Abbiamo quindi ottenuto un'*equazione equivalente a quella data.*

- Consideriamo l'equazione $7x+6=20$, la cui soluzione è $x=2$, e sottraiamo a entrambi i membri un numero, per esempio **4**; otteniamo:

  $$7x+6-\mathbf{4}=20-\mathbf{4} \quad \text{ovvero} \quad 7x+2=16$$

  la cui soluzione è ancora $x=2$.
  Abbiamo quindi ottenuto un'*equazione equivalente a quella data.*

- Consideriamo l'equazione $10x+7=57$, la cui soluzione è $x=5$, e addizioniamo a entrambi i membri una stessa espressione algebrica contenente l'incognita, per esempio il monomio $\mathbf{5x}$; otteniamo:

  $$10x+7+\mathbf{5x}=57+\mathbf{5x} \quad \text{ovvero} \quad 15x+7=57+5x$$

  la cui soluzione, potete verificarlo, è ancora $x=5$.
  Abbiamo quindi ottenuto un'*equazione equivalente a quella data.*

- Consideriamo l'equazione $3x-4=26$, la cui soluzione è $x=10$, e sottraiamo a entrambi i membri il monomio $\mathbf{7x}$; otteniamo:

  $$3x-4-\mathbf{7x}=26-\mathbf{7x} \quad \text{ovvero} \quad -4x-4=26-7x$$

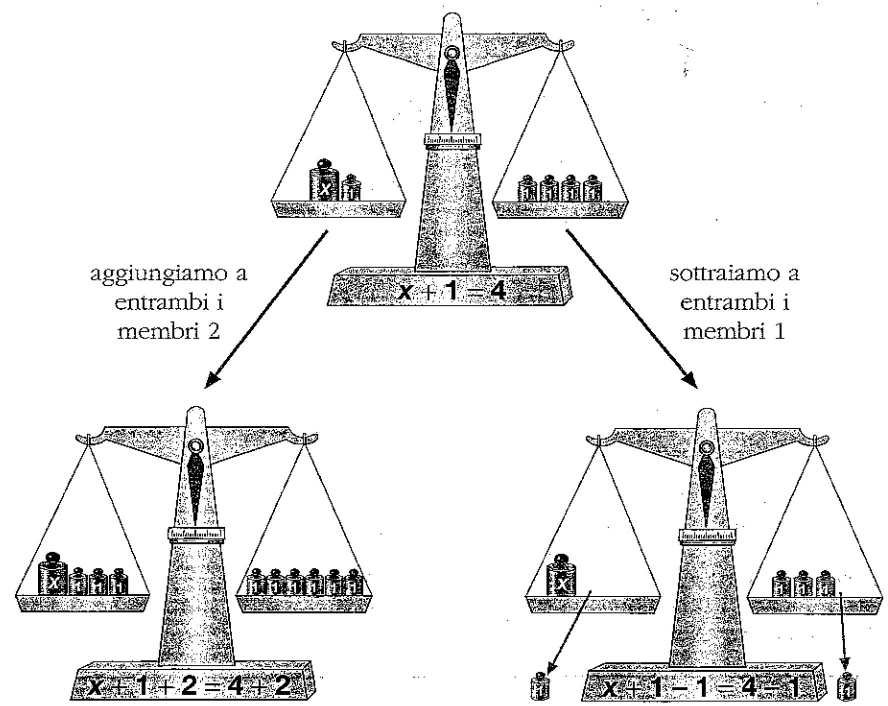
  la cui soluzione è ancora $x=10$.
  Abbiamo quindi ottenuto un'*equazione equivalente a quella data.*

Gli esempi considerati ci permettono di enunciare il **1° principio di equivalenza**:

Addizionando o sottraendo ai due membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica contenente l'incognita si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Possiamo renderci conto del 1° principio di equivalenza "pesando" i due membri di un'equazione, per esempio quelli dell'equazione $x+1=4$.

Osserva:



L'equilibrio sussiste in tutte le bilance, quindi le equazioni:

$$x + 1 = 4$$
$$x + 1 + 2 = 4 + 2$$
$$x + 1 - 1 = 4 - 1$$

sono equivalenti.

Applicazioni del 1° principio di equivalenza

1) Consideriamo l'equazione $5x + 7 = 27$ e sottraiamo a entrambi i membri il numero **7**; otteniamo:

$$5x + 7 - \mathbf{7} = 27 - \mathbf{7} \qquad \text{ovvero} \qquad 5x = 27 - \mathbf{7}$$

Se confrontiamo le due equazioni equivalenti $5x + 7 = 27$ e $5x = 27 - 7$, osserviamo che l'applicazione del 1° principio di equivalenza praticamente si riduce a spostare il termine noto dal primo membro al secondo membro dove lo ritroviamo cambiato di segno. Possiamo quindi affermare che:

> In ogni equazione un termine qualsiasi può essere spostato da un membro all'altro purché lo si cambi di segno (**legge del trasporto**).

Esempi...

1. $3x + 5 - 4 = -5x + 7 \rightarrow$ è equivalente a: $3x + 5x = -5 + 4 + 7$

2. $5 - 3x + 4 = 10x + 17 \rightarrow$ è equivalente a: $-3x - 10x = -5 - 4 + 17$

2) Consideriamo l'equazione $3x - 5 = 2x + 10 - 5$ e applichiamo quanto detto prima spostando il termine -5 dal primo al secondo membro cambiandolo di segno; otteniamo:

$$3x = 2x + 10 - 5 + 5 \qquad \text{ovvero} \qquad 3x = 2x + 10$$

Se confrontiamo le due equazioni equivalenti ci accorgiamo che praticamente abbiamo eliminato il termine -5 che era presente in entrambi i membri.

Possiamo quindi affermare che:

> Se in entrambi i membri di un'equazione figurano due termini uguali, essi possono essere eliminati.

Esempi...

1. $22x + \cancel{4} - 5 = 8x + \cancel{4} + 9 \rightarrow$ è equivalente a: $22x - 5 = 8x + 9$

2. $14x - 1 + \cancel{8x} = 13 + \cancel{8x} \rightarrow$ è equivalente a: $14x - 1 = 13$

Secondo principio di equivalenza

- Consideriamo l'equazione $-3x + 2 = -22$, la cui soluzione è $x = 8$, e moltiplichiamo entrambi i membri per uno stesso numero, per esempio **2**; otteniamo:

$$\mathbf{2} \cdot (-3x + 2) = \mathbf{2} \cdot (-22) \qquad \text{ovvero} \qquad -6x + 4 = -44$$

la cui soluzione, come potete verificare, è ancora $x = 8$.
Abbiamo quindi ottenuto un'*equazione equivalente a quella data.*

- Consideriamo l'equazione $15x - 20 = 25$, la cui soluzione è $x = 3$, e dividiamo entrambi i membri per uno stesso numero, per esempio **5**; otteniamo:

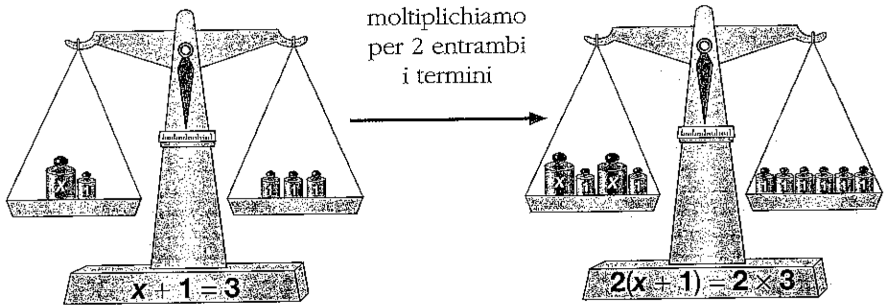
$$(15x - 20) : \mathbf{5} = 25 : \mathbf{5} \qquad \text{ovvero} \qquad 3x - 4 = 5$$

la cui soluzione è ancora $x = 3$.
Abbiamo quindi ottenuto un'*equazione equivalente a quella data.*

Gli esempi considerati ci permettono l'affermazione del **2° principio di equivalenza**:

> Moltiplicando o dividendo entrambi i termini di un'equazione per uno stesso numero (diverso da zero) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Possiamo renderci conto del 2° principio di equivalenza "pesando" ancora i due membri di un'equazione, ad esempio quelli dell'equazione $x + 1 = 3$.
Osserva:



L'equilibrio sussiste in entrambe le bilance, quindi le equazioni:

$$x + 1 = 3$$
$$2(x + 1) = 2 \times 3$$

sono equivalenti.

Applicazioni del 2° principio di equivalenza

1) Consideriamo l'equazione $5x - 4 = 2$ e applichiamo il 2° principio di equivalenza moltiplicando per $-\mathbf{1}$; otteniamo:

$$-\mathbf{1} \cdot (5x - 4) = -\mathbf{1} \cdot 2 \quad \text{ovvero} \quad -5x + 4 = -2$$

Confrontando le due equazioni equivalenti, noteremo che praticamente si passa dalla prima alla seconda cambiando di segno tutti i termini dell'equazione.

Possiamo allora affermare che:

> Cambiando il segno di ciascun termine di un'equazione se ne ottiene una equivalente a quella data.

Esempi...

1. $17x - 1 = 3 + 15x \rightarrow$ è equivalente a: $-17x + 1 = -3 - 15x$

2. $x - 4 = 3x - 18 \rightarrow$ è equivalente a: $-x + 4 = -3x + 18$

2) Consideriamo un'equazione avente i coefficienti dell'incognita e/o i termini noti frazionari:
$\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} = x - \frac{5}{2}$ e applichiamo il 2° principio di equivalenza moltiplicando i due membri dell'equazione per il m.c.m. di tutti i denominatori, cioè per m.c.m. $(4; 3; 2) = \mathbf{12}$.

Otteniamo:

$$\mathbf{12} \cdot \left(\frac{3x}{4} - \frac{2}{3}\right) = \mathbf{12} \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$\cancel{12}^{3} \cdot \frac{3x}{\cancel{4}_1} - \cancel{12}^{4} \cdot \frac{2}{\cancel{3}_1} = 12 \cdot x - \cancel{12}^{6} \cdot \frac{5}{\cancel{2}_1} \quad \text{ovvero} \quad 9x - 8 = 12x - 30$$

che è un'equazione equivalente a quella data e a coefficienti interi.

Possiamo quindi affermare che:

> Un'equazione a coefficienti frazionari si può ridurre a un'equazione a coefficienti interi a essa equivalente moltiplicando tutti i suoi termini per il m.c.m. dei denominatori.

Esempi...

1. $\frac{2}{5}x - 2 = \frac{1}{4}x + 4$ m.c.m. $(5; 4) = 20$ per cui:

$${}^{4}\cancel{20} \cdot \frac{2}{\cancel{5}_1} x - 20 \cdot 2 = {}^{5}\cancel{20} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} x + 20 \cdot 4 \quad \text{cioè:}$$

$$\mathbf{8x - 40 = 5x + 80}$$

2. $\frac{3 - x}{8} - \frac{x + 1}{4} = -\frac{1}{3}x$ m.c.m. $(8; 4; 3) = 24$ per cui:

$${}^{3}\cancel{24} \cdot \frac{3 - x}{\cancel{8}_1} - {}^{6}\cancel{24} \cdot \frac{x + 1}{\cancel{4}_1} = \cancel{24}^{8} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{3}_1} x\right) \quad \text{cioè:}$$

$$\mathbf{9 - 3x - 6x - 6 = -8x}$$

Per un primo controllo

1. Completa:
- $2x = x + x$ è un' .... perché è verificata ....
- $3x + 7 = 19$ è un' .... perché è verificata ....
- Due equazioni che hanno la stessa soluzione si dicono ....

2. Stabilisci per quale principio (1° o 2°) sono equivalenti le seguenti coppie di equazioni:
- $7x - 5 = 10$; $\quad 7x - 5 + 3x = 10 + 3x$.
- $5 - 4x + x = x - 6$; $\quad -5 + 4x - x = -x + 6$.
- $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 4x + 3$; $\quad x - 2 = 16x + 12$.

Risoluzione di un'equazione di 1° grado

Osserviamo le seguenti equazioni:

$$5x = 15 \qquad -3x = 10 \qquad 2x = -14$$

Esse presentano la stessa caratteristica: i due membri sono rispettivamente formati da un unico termine in x il primo e da un unico termine noto il secondo. Un'equazione di questo tipo si dice *ridotta in forma normale* e la si indica con la scrittura:

$$\boldsymbol{ax = b} \qquad \text{con } a \text{ e } b \text{ numeri reali}$$

cioè a e b sono due numeri relativi che si dicono rispettivamente *coefficiente della* x *e termine noto.*
Per risolvere un'equazione ridotta in forma normale basta applicare il 2° principio di equivalenza dividendo entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente della x; avremo quindi:

$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$ cioè $\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$ che è la soluzione dell'equazione.

Possiamo allora affermare che:

Per risolvere un'equazione ridotta in forma normale basta dividere il termine noto dell'equazione per il coefficiente dell'incognita.

Esempio...

- Risolvere le seguenti equazioni.

a) $7x = 14 \qquad x = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{7}_{1}} \qquad \boldsymbol{x = 2}$ **d)** $-6x = -12 \qquad x = \frac{\cancel{-12}^{2}}{\cancel{-6}_{1}} \qquad \boldsymbol{x = 2}$

b) $3x = -21 \qquad x = -\frac{\cancel{21}^{7}}{\cancel{3}_{1}} \qquad \boldsymbol{x = -7}$ **e)** $-15x = 20 \qquad x = \frac{\cancel{20}^{4}}{\cancel{-15}_{3}} \qquad \boldsymbol{x = -\frac{4}{3}}$

c) $-5x = 15 \qquad x = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{-5}_{1}} \qquad \boldsymbol{x = -3}$

Per risolvere un'equazione che non sia scritta nella sua forma normale, occorre innanzi tutto ridurla in tale forma e poi applicare la regola appena vista. Per ridurre una qualsiasi equazione in forma normale, e quindi risolverla, si applicano i principi di equivalenza studiati. Vediamo meglio il procedimento nei diversi casi che si possono presentare.

1) $-8 + 3x + 14 = 7x - 10$

applicando la legge del trasporto, scriviamo al primo membro tutti i termini contenenti l'incognita e al secondo membro tutti i termini noti:

$3x - 7x = 8 - 14 - 10$

eseguiamo le addizioni algebriche che figurano ai due membri:

$-4x = -16$

Abbiamo trasformato la nostra equazione in forma normale, per cui:

$x = \frac{\cancel{-16}^{4}}{\cancel{-4}_{1}} \qquad \boldsymbol{x = +4}$

2) $4(3 - x) - 14(x - 2) - 15 = 15 - 8x$

poiché compaiono delle parentesi, eliminiamole eseguendo le operazioni indicate:

$12 - 4x - 14x + 28 - 15 = 15 - 8x$

applicando la legge del trasporto, raggruppiamo al primo membro tutti i termini in x e al secondo tutti i termini noti:

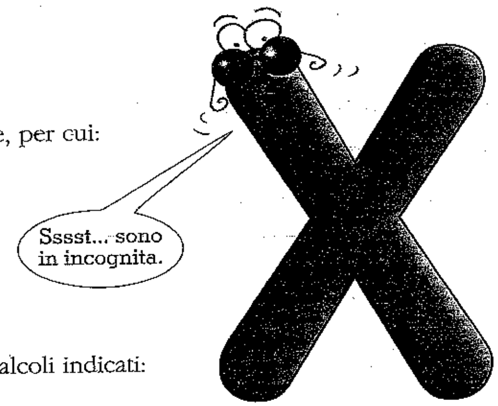
$-4x - 14x + 8x = -12 - 28 + 15 + 15$

eseguiamo le addizioni algebriche:

$-10x = -10$

abbiamo l'equazione in forma normale, per cui:

$x = \frac{\cancel{-10}^{1}}{\cancel{-10}_{1}} \qquad \boldsymbol{x = 1}$



3) $\frac{5}{6}(2x - 1) = \frac{1}{4}(5x - 2)$

eliminiamo le parentesi eseguendo i calcoli indicati:

$\frac{5}{3}x - \frac{5}{6} = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

poiché l'equazione è a termini frazionari, riduciamola a forma intera moltiplicando i due membri per il m.c.m. dei denominatori:
m.c.m. (3; 6; 4; 2) = 12

$12 \cdot \left(\frac{5}{3}x - \frac{5}{6}\right) = 12 \cdot \left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}\right)$ da cui: $20x - 10 = 15x - 6$

Raggruppiamo i termini in x e i termini noti:

$20x - 15x = 10 - 6$

eseguiamo le addizioni algebriche:

$5x = 4$ quindi: $\boldsymbol{x = \frac{4}{5}}$

I casi considerati ci permettono di scrivere la seguente regola pratica per risolvere una qualsiasi equazione di 1° grado a un'incognita:

1) Si eliminano le parentesi eseguendo le operazioni indicate secondo le regole del calcolo letterale;
2) se l'equazione ha coefficienti e/o termini noti frazionari, si moltiplicano tutti i suoi termini per il m.c.m. dei denominatori;
3) si trasportano tutti i termini in x al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro tenendo presente la legge del trasporto;
4) si eseguono le addizioni algebriche ottenute nei due membri in modo tale da ottenere l'equazione in forma normale: $ax = b$;
5) si determina la soluzione $x = \frac{b}{a}$

Equazioni determinate, indeterminate e impossibili

Consideriamo ancora un'equazione nella sua forma normale $ax = b$ e discutiamone la soluzione $x = \frac{b}{a}$ nei casi in cui il coefficiente a o il termine noto b, o entrambi, siano uguali a zero:

1° caso

- $ax = b$ con $a, b \neq 0$

La soluzione $x = \frac{b}{a}$ esiste ed è unica; l'equazione si dice **determinata**.

- $ax = b$ con $a \neq 0$ e $b = 0$

La soluzione $x = \frac{0}{a}$ esiste ed è unica: $x = 0$; l'equazione è quindi **determinata**.

2° caso $ax = b$ con $a = 0$ e $b \neq 0$

L'equazione diventa $0 \cdot x = b$ e, poiché sappiamo che non esiste alcun numero che moltiplicato per zero ci dà un risultato diverso da zero, diremo che l'equazione non ha soluzione. Essa si dice **impossibile**.

3° caso $ax = b$ con $a, b = 0$

L'equazione diventa $0 \cdot x = 0$ e, poiché sappiamo che qualsiasi numero moltiplicato per zero dà zero, diremo che l'equazione ammette come soluzione un qualsiasi numero, ha cioè infinite soluzioni. Essa si dice **indeterminata**.

Riassumiamo quanto detto in uno schema:

Equazione $ax = b$		
1° caso: $a \neq 0$,	$b \neq 0$; soluzione $x = \frac{b}{a}$ $b = 0$; soluzione $x = \frac{0}{a} = 0$	**Equazione determinata**
2° caso: $a = 0$, $b \neq 0$;	nessuna soluzione	**Equazione impossibile**
3° caso: $a = 0$, $b = 0$;	è verificata da qualsiasi valore attribuito all'incognita	**Equazione indeterminata**

Esempi...

1. $\frac{5-3x}{6} - \frac{1}{3} = \frac{8-x}{2}$

$\cancel{6}^1 \cdot \frac{5-3x}{\cancel{6}_1} - \cancel{6}^2 \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = \cancel{6}^3 \cdot \frac{8-x}{\cancel{2}_1}$ da cui: $5-3x-2 = 24-3x$ e

$-3x+3x = -5+2+24$ quindi: $0x = 21$ **equazione impossibile**

2. $\frac{5x+3}{3} = 4x+1$

$\cancel{3}^1 \cdot \frac{5x+3}{\cancel{3}_1} = 3 \cdot 4x + 3 \cdot 1$ da cui: $5x+3 = 12x+3$ e $5x-12x = -3+3$

$-7x = 0$ $\boldsymbol{x = 0}$

3. $6x-3 = 3(2x-2)+3$
$6x-3 = 6x-6+3$ da cui: $6x-6x = +3-6+3$
$0x = 0$ **equazione indeterminata**

Verifica di un'equazione

Dopo aver risolto un'equazione è opportuno controllare se la soluzione è esatta procedendo con la verifica. Essa consiste nel sostituire all'incognita nel 1° e nel 2° membro dell'equazione la soluzione trovata, calcolare il valore numerico delle due espressioni ottenute e constatare l'uguaglianza dei due valori.

Esempio...

- Risolvere e verificare l'equazione $\frac{4-x}{6}+\frac{x+4}{2}=\frac{x-8}{6}$.

Risoluzione

$$\cancel{6}^1\cdot\frac{4-x}{\cancel{6}_1}+\cancel{6}^3\cdot\frac{x+4}{\cancel{2}_1}=\cancel{6}^1\cdot\frac{x-8}{\cancel{6}_1}$$

$$4-x+3x+12=x-8$$

$$-x+3x-x=-4-12-8$$

$$x=-24$$

Verifica

$$\frac{4-(-24)}{6}+\frac{-24+4}{2}=\frac{-24-8}{6}$$

$$\frac{\cancel{28}^{14}}{\cancel{6}_3}-\frac{\cancel{20}^{10}}{\cancel{2}_1}=-\frac{\cancel{32}^{16}}{\cancel{6}_3}$$

$$\frac{14-30}{3}=-\frac{16}{3}$$

$$-\frac{16}{3}=-\frac{16}{3}$$

L'uguaglianza numerica è verificata, quindi $x=-24$ è la soluzione esatta.

Per un primo controllo

1. Quale fra le seguenti equazioni è scritta in forma normale? Segnala:
   - $3x-5=2$ ☐
   - $4+2x=7$ ☐
   - $5x=9$ ☐

2. Completa:
   L'equazione $ax=b$ è:
   - indeterminata se ....;
   - impossibile se ....;
   - determinata se ....

3. Risolvi le seguenti equazioni:
   - $7x+5=2x-6$
   - $5-3x+2=8-3x$
   - $\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}x=6-\frac{5}{2}$
   - $\frac{x-2}{2}+\frac{3x+2}{2}=6$

Soluzione algebrica dei problemi

Siamo arrivati alla parte applicativa di quanto abbiamo imparato finora: la risoluzione di problemi mediante l'uso delle equazioni, cioè la **risoluzione algebrica** dei problemi.
Le equazioni trovano infatti largo uso nella risoluzione di molti problemi in quanto permettono di superare facilmente le difficoltà che spesso una situazione problematica può presentare se affrontata con strategie risolutive diverse. Attraverso alcuni esempi noi adesso cercheremo di impadronirci di questa tecnica di risoluzione, limitandoci a **problemi di 1° grado a un'incognita**, a problemi cioè risolvibili con un'equazione di 1° grado a un'incognita.
Anche la risoluzione algebrica di un problema, come abbiamo visto per altre strategie risolutive, consta di alcune fasi ben precise:

1) Lettura, analisi del testo, individuazione dei dati e scelta dell'incognita

In questa fase si analizza e si comprende il testo del problema, si riconoscono tutti i dati e le incognite del problema e, in particolare, si pone attenzione alla scelta della grandezza da assumere come incognita dell'equazione. Tale grandezza, legata direttamente o indirettamente alla richiesta del problema, si indica con x.

2) Traduzione del problema in equazione

Attraverso ragionamenti logici, in questa fase si passa alla giusta impostazione dell'equazione risolutrice del problema legando opportunamente i dati e l'incognita.

3) Risoluzione dell'equazione

In questa fase si procede alla risoluzione dell'equazione che, come sappiamo, può essere:
- indeterminata; in questo caso anche il **problema** si dice **indeterminato**, cioè verificato per qualsiasi valore;
- impossibile; in questo caso anche il **problema** si dice **impossibile**, cioè non risolvibile in quanto non ammette soluzione;
- determinata; in questo caso il **problema può essere o no risolvibile** in quanto la soluzione esiste ma deve essere controllata.

4) Discussione della risoluzione

In questa fase si procede valutando se la soluzione trovata può essere accettata oppure no, cioè se la soluzione dell'equazione ha senso per il problema. Per esempio, se la richiesta del problema è la determinazione della misura di un segmento, una soluzione negativa dell'equazione non può essere accettata; oppure se la richiesta è di trovare un numero di persone, di oggetti o di cose, una soluzione frazionaria dell'equazione non può essere accettata.